# JJ-1354

**B.Sc. (Part - III)**

Term End Examination, 2019

# MATHEMATICS

Paper - I

Analysis

*Time* : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

**नोट** : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**Note** : Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

## इकाई / Unit-I

1. (*a*) मानलो $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ तथा $t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n > 0$ तब सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ और $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ एक ही संख्या को

अभिसारित करती है, अर्थात

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n$$

Let $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ and $t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n > 0$,

then prove that the sequences $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges to the same number i.e.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n$$

(*b*) स्वार्ज प्रमेय लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Schwarz's theorem.

(*c*) अन्तराल $-\pi < x < \pi$ में फलन $f(x) = x + x^2$ के $x$ के गुणकों की ज्या और कोज्या श्रेणी प्राप्त कीजिए।

अतः दर्शाइये कि $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\ldots$

Find a series of sine and cosine of multiples of $x$ which will represent the function $f(x) = x + x^2$ in the interval $-\pi < x < \pi$.

Hence show that $\dfrac{\pi^2}{6} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ......$

## इकाई / Unit-II

2. (a) यदि $f(x) = x^3$, $x \in [0, a]$, $a > 0$, तो दर्शाइये कि $f \in R[0, a]$ तथा $\int_0^a x^3 dx = \dfrac{a^4}{4}$ ।

If $f(x) = x^3$, $x \in [0, a]$, $a > 0$, then show that $f \in R[0, a]$ and $\int_0^a x^3 dx = \dfrac{a^4}{4}$.

(b) समाकल $\int_a^b \dfrac{dx}{(x-a)^n}$ के अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of $\int_a^b \dfrac{dx}{(x-a)^n}$.

(*c*) यदि $\alpha^2 < 1$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{1+\alpha \sin x}{1-\alpha \sin x}\right)\frac{dx}{\sin x} = \pi \sin^{-1}\alpha$$

If $\alpha^2 < 1$, then prove that

$$\int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{1+\alpha \sin x}{1-\alpha \sin x}\right)\frac{dx}{\sin x} = \pi \sin^{-1}\alpha$$

## इकाई / Unit-III

3. (*a*) विश्लेषिक फलन ज्ञात कीजिए जिसका वास्तविक भाग है

$$e^{-x}\{(x^2 - y^2)\cos y + 2xy \sin y\}$$

Find the analytic function of which the real part is

$$e^{-x}\{(x^2 - y^2)\cos y + 2xy \sin y\}$$

(*b*) उन सभी द्विरैखिक रूपान्तरणों को ज्ञात कीजिए जो अर्ध समतल $I(z) \geq 0$ को इकाई वृत्तीय चक्रिकर $|w| \leq 1$ में अच्छादक प्रतिचित्रित करता है।

To find all the bilinear transformations which maps the half plane $I(z) \geq 0$ onto the unit circular disc $|w| \leq 1$.

(*c*) दिखाइए कि रूपान्तरण $w = z^2$, $z$–समतल में वृत्तों $|z - \alpha| = c$ ($\alpha, c$ वास्तविक है) को संगत $w$–समतल में लिमाकॉन में रूपांतरित करता है।

By the transformation $w = z^2$, show that the circles $|z - \alpha| = c$ ($\alpha, c$ being real) in the $z$-plane correspond to the Limacons in the $w$-plane.

## इकाई / Unit-IV

4. (*a*) किसी दूरीक समष्टि में, परिमित संख्या में विवृत समुच्चयों का सर्वनिष्ठ विवृत होता है।

Prove that, in a metric space the intersection of finite number of open set is open.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि दूरीक समष्ठि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

Prove that every convergent sequence in a metric space is bounded.

(*c*) दर्शाइए की यदि $S$ वास्तविक संख्याओं का एक अरिक्त और निम्न परिबद्ध समुच्चय हो, तो $S$ के महत्तम निम्न परिबद्ध का अस्तित्व $R$ में होता है।

Show that if $S$ is a non-empty subset of real numbers which is bounded below has the greatest lower bound in $R$.

**इकाई / Unit-V**

5. (*a*) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक पूर्ण दूरीक समष्ठि द्वितीय संवर्ग का होता है।

Prove that every complete metric space is of second category.

(*b*) विस्तार प्रमेय लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Extension theorem.

(*c*) सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्ठि का एक संहत उपसमुच्चय संवृत और परिबद्ध होता है।

Prove that a compact subset of a metric space is closed and bounded.

JJ-1355

**B.Sc. (Part - III)**

Term End Examination, 2019

# MATHEMATICS

Paper - II

Abstract Algebra

*Time* : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

**नोट** : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**Note** : Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

## इकाई / Unit-I

1. (*a*) किसी समूह के केन्द्र की परिभाषा दीजिए। सिद्ध कीजिए कि किसी समूह $G$ का केन्द्र $G$ का प्रसामान्य उपसमूह होता है।

Define centre of a group. Prove that the center of any group $G$ is normal subgroup of $G$.

(*b*) यदि $H$, समूह $G$ का एक $p$–साइलो उपसमूह हो तथा $x \in G$, तब सिद्ध कीजिए कि $x^{-1}Hx$ भी $G$ का एक $p$–साइलो उपसमूह होगा।

If $H$ be a $p$-Sylow subgroup of the group G and $x \in G$, then prove that $x^{-1}Hx$ is also a $p$-Sylow subgroup of $G$.

(*c*) माना $G$ एक समूह है तथा $T$, $G$ का एक स्वाकारिता है। यदि $a \in G$ के लिए $N(a) = \{x \in G; ax = xa\}$, तो सिद्ध कीजिए कि $N(T(a)) = T(N(a))$।

Let $G$ be a group and $T$ is an automorphism of $G$. If for $a \in G$, $N(a) = \{x \in G; ax = xa\}$, then prove that $N(T(a)) = T(N(a))$.

## इकाई / Unit-II

2. (*a*) किसी वलय $R$ का प्रत्येक विभाग वलय उस वलय का समाकारी प्रतिबिम्ब होता है।

Prove that every Quotient Ring of a Ring $R$ is the homomorphic image of that Ring.

(*b*) यदि

$f(x) = 3x^0 + 4x + 2x^2$

$g(x) = 1x^0 + 3x + 4x^2 + 2x^3$ वलय $(I_5, +5.5)$ पर दो बहुपद हों तो निम्न को ज्ञात कीजिए :

(*i*) $f(x) + g(x)$

(*ii*) $f(x)\ g(x)$

If

$f(x) = 3x^0 + 4x + 2x^2$

$g(x) = 1x^0 + 3x + 4x^2 + 2x^3$ are two polynomials over the Ring $(I_5, +5.5)$ then find

(*i*) $f(x) + g(x)$

(*ii*) $f(x)\ g(x)$

(*c*) भागफल और शेषफल को ज्ञात कीजिए जब बहुपद $x^5 + 2x^2 - x + 4$ के $x + 2$ से भाग दिया जाता है।

Find the quotient and remainder when the polynomial $x^5 + 2x^2 - x + 4$ is divided by $x + 2$.

## इकाई / Unit-III

3. (*a*) सिद्ध कीजिए कि एक सदिश समष्टि $V$, दो उपसमष्टियों $W_1$ एवं $W_2$ का सरल योग होगा यदि और केवल यदि

(*i*) $V = W_1 + W_2$

(*ii*) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

Prove that a vector space $V$ is the direct sum of its two subspaces $W_1$ and $W_2$ iff

(*i*) $V = W_1 + W_2$

(*ii*) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

(*b*) यदि $W$ एक परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ का एक उपसमष्टि है, तब सिद्ध कीजिए :

$$\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$$

If $W$ is a subspace of a finite dimensional vector space $V(F)$, then prove :

$$\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$$

(*c*) सिद्ध कीजिए कि $n$ विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ के प्रत्येक $(n+1)$ या इससे अधिक सदिशों के समुच्चय रैखिकत: स्वतंत्र होंगे।

Prove that each set of $(n+1)$ or more vectors of a finite dimensional vector space $V(F)$ of dimension $n$ is L.D.

## इकाई / Unit-IV

4. (*a*) सदिश समष्टि समाकारिता की अष्टि की परिभाषा दीजिए। माना कि $V(F)$, क्षेत्र $F$ पर एक सदिश समष्टि है और $W$, $V$ की एक उपसमष्टि है, तब सिद्ध कीजिए की विभाग समष्टि $\frac{V}{W}$, $V$ का समाकारी प्रतिबिम्ब है और इस समाकारिता की अष्टि $W$ है।

Define Kernel of a vector space homomorphism. Let $V(F)$ be a vector space over the field $F$ and $W$ be a subspace of $V$, then prove that $\frac{V}{W}$ is a homomorphic image of $V$ with Kernel $W$.

(*b*) दर्शाइए कि प्रतिचित्रण $T : R^2 \to R^3$ जो, $T(a, b) = (a - b, b - a, - a) \ \forall \ a, b \in R$ के परिभाषित हैं, एक रैखिक रूपान्तरण है $R^2$ से $R^3$ तक। $T$ का परिसर, जाति, रिक्त समष्टि तथा शून्यता ज्ञात कीजिए।

Show that the transformation $T : R^2 \to R^3$ defined by $T(a,b) = (a-b, b-a, -a) \ \forall \ a,b \in R$ is a linear transformation from $R^2$ into $R^3$. Find the range, rank, null space and nullity of $T$.

(c) आधार समुच्चय

$\mathscr{B} = \{(1, -1, 3), (0, 1, -1), (0, 3, -2)\}$ का द्वैत आधार ज्ञात कीजिए $V_3(R)$ के लिए।

Find the dual basis of the basis set $\mathscr{B} = \{(1, -1, 3), (0, 1, -1), (0, 3, -2)\}$ for $V_3(R)$.

## इकाई / Unit-V

5. (a) श्वार्ज असमिका लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Schwartz's inequality.

(b) सिद्ध कीजिए कि आन्तर गुणन समष्टि $V$ में शून्येत्तर सदिशों का कोई लाम्बिक समुच्चय रैखिकत: स्वतंत्र होता है।

Prove that any orthogonal set of non-zero vectors in an inner product space $V$ is linearly independent.

(c) ग्राम-श्मिट के लाम्बिक प्रक्रम का उपयोग करके $V_3(R)$ के आधार $\mathscr{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ से एक प्रसामान्य लांबिक आधार प्राप्त कीजिए जहाँ $\beta_1 = (1, 0, 1), \beta_2 = (1, 2, -2), \beta_3 = (2, -1, 1)$।

Apply the Gram-Schmidt Orthogonalization process to obtain an orthogonal basis from the basis

$\mathscr{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ of $V_3(R)$ where

$\beta_1 = (1, 0, 1), \beta_2 = (1, 2, -2), \beta_3 = (2, -1, 1)$